

На правах рукописи



Аунг Зо Лат

**ПОВЕДЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ
ПРИ УДАРНЫХ НАГРУЗКАХ**

05.23.17. – Строительная механика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва – 2013

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Московский государственный университет путей сообщения» МГУПС (МИИТ)

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Мещеряков Владимир Борисович

Официальные оппоненты: **Коренева Елена Борисовна**
доктор технических наук, профессор кафедры «Информатика и прикладная математика» Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Московский государственный строительный университет

Григорьев Никита Алексеевич
кандидат технических наук, Открытое акционерное общество (ОАО) «Союздорпроект», инженера II категории

Ведущая организация: **Центральный научно-исследовательский институт строительных конструкций имени В.А. Кучеренко (ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко)**

Защита состоится « 20 » ноября 2013 г. в 15.00 часов на заседании диссертационного совета Д218.005.05 на базе федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный университет путей сообщения» по адресу: 127994, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9, ауд. 7618, (7-ой корпус МИИТа, Минаевский переулок, д. 2, ауд. 7618).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МГУПС (МИИТ).
Автореферат разослан « 18 » октября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат технических наук, доцент



Шавыкина М.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Актуальность проблемы.

Работа посвящена недостаточно изученной проблеме поведения тонкостенных стержней на действие ударных нагрузок. Ударяющее тело считается массивным, работа тонкостенных стержней открытого профиля описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных. За счет учета деформаций сдвига при изгибе и кручении уравнения принадлежат к гиперболическому типу. При этом учитываются волноводные свойства стержней, имеется возможность рассматривать влияние отраженных волн на силовые и кинематические параметры.

Тонкостенные стержни открытого профиля находят широкое применение во многих областях промышленности и строительства. Особое место среди нагрузок, которые испытывают конструкции, сооружения и аппараты, занимает ударная нагрузка. В научных публикациях отсутствует концепция расчета на удар, которую можно было бы использовать в практических расчетах.

Цели и задачи работы.

Цель - построение усовершенствованных методов расчёта тонкостенных стержней на продольные и поперечные удары массивного тела.

Для достижения этой цели необходимо построить концепцию, включающую следующие задачи:

1. Определить параметров контактной силы при ударе построить нелинейное интегральное уравнение с учётом местных упругих деформации.
2. Выбрать метод для численного расчёта нелинейного интегрального уравнения.
3. Определить перемещения ударяемых тел использовать дифференциальные уравнения, принадлежащие к гиперболическому типу.
4. Построить приближённые выражения корни биквадратных частотных уравнений при изгибе и кручении тонкостенных стержней.
5. Использовать нелинейные уравнения с учётом точного значения кривизны оси стержня в случаях потери устойчивости при центральном продольном ударе или потери устойчивости плотской формы изгиба после критических перемещений.

6. Выяснить влияния деформаций сдвига при изгибе и кручений на силовые и кинематические параметры напряжённо-деформированного состояния.

Научная новизна диссертационной работы:

1. Параметры контактной силы при ударе определяются на основе теории Герца местных упругих деформации при любом соотношении масс соударяющихся тел.

2. Нелинейное интегральное уравнение решается численно по методу Эйлера.

3. Уравнения изгиба и кручения тонкостенных стержней с учётом деформация сдвига решаются аналитически с использованием интегрального преобразования Лапласа.

4. Для достаточно точного определения корни биквадратных частотных уравнений получены простые выражения путём разложения степени ряды.

5. Установлено существенные влияния деформаций сдвига на уменьшение силовых и увеличение кинематических параметров стержней при ударе.

Достоверность результатов.

При выполнении исследования использовались известные уравнения и проверенные способы их решения. Полученные теоретические результаты сопоставлены с опубликованными в 1961 году в статье М.Е. Каган и М.Д. Геня данными экспериментов. Расчетом подтверждены продолжительности периодов процесса (сжатие, потеря устойчивости, смена числа полуволн, затухающие колебания), отмеченные в экспериментах.

Практическая ценность работы.

1. На основе предложенной концепции рассмотрены практические задачи расчета тонкостенных стержней открытого профиля на действие ударной нагрузки: при продольном центральном ударе определено напряженно-деформированное состояние стержня с учетом волн, отраженных от опорных устройств. Рассмотрено влияние двухосного эксцентриситета.

2. При поперечном центральном ударе определяется напряженно-деформированное состояние стержня с учетом волн, отраженных от опорных устройств. Учет деформаций сдвига при изгибе и кручении дает существен-

ные поправки к максимальным значениям: уменьшение силовых и увеличение кинематических параметров на 15-20%.

3. Рассмотрена потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия при центральном продольном ударе. При условии работы материала стержня в упругой стадии получены перемещения выпучивания и возврат в прямолинейную форму при уменьшении ударной силы. Полученные теоретические результаты хорошо согласуются с данными экспериментов, опубликованных в 1961 году в статье М.Е. Каган и М.Д. Геня [52].

4. Рассмотрена потеря устойчивости плоской формы динамического изгиба стержня при центральном поперечном ударе. При условии работы материала стержня в упругой стадии получены линейные и угловые перемещения выпучивания и возврат в плоскую форму изгиба при снижении ударной силы.

Публикации. Основное содержание работы опубликовано в четырех статьях в научно-технических журналах, в том числе одна статья журнале, включенном в список ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения. Она содержит 117 страниц машинописного текста, 15 таблиц, 45 рисунков. Список использованных источников составляет 177 названий.

Основное содержание диссертации.

В первой главе дается обзор развития теории тонкостенных стержней. Отмечены работы L. Prandtl (1899 г.), A. Michell (1899 г.), С.П. Тимошенко (1905 г.), С. Weber (1926 г.), Н. Wagner (1934 г.) и R. Kappus (1937 г.). Общая теория прочности, устойчивости и колебаний тонкостенных стержней открытого профиля была создана В.З. Власовым (1940 г.). В работе А.Л. Гольденвейзера (1949 г.) предложено уточнение исходных положений теории, в работах В.Б. Мещерякова (1963 – 1968 гг.) в развитие работы А.Л. Гольденвейзера построена теория тонкостенных стержней открытого профиля с учетом деформаций сдвига.

Дан краткий обзор работ по расчету стержней на удар. Отмечены работы Th. Young (1807 г.), E. Hodkinson (1849 г.), Н. Сох (1851 г.). Учет появляющихся колебаний при продольном ударе по стержню выполнил L.M. Navier (1864 г.). При поперечном ударе этот вопрос исследовал Barre. Saint-Venant.

В 1912 г С.П. Тимошенко применил теорию Н. Hertz (1882 г.) к задаче поперечного удара по шарнирно опертой балке.

Во второй главе предложена концепция расчета стержней на ударное действие. Исследование работы стержня на ударное действие состоит из ряда математических операций, и для каждой из них желательно выбрать наиболее рациональный подход.

Основной задачей в расчетах на удар является определение параметров контактной силы. В соответствии с теорией Н. Hertz можно записать такое уравнение:

$$P(t) = K_0 u^{3/2} = K_0 (u_1 - u_2)^{3/2}. \quad (1)$$

Здесь K_0 – параметр контактной жесткости, зависящий от свойств соударяющихся тел. Если в это уравнение подставить выражения u_1 и u_2 , зависящие от силы $P(t)$, то оно будет служить математической моделью рассматриваемого процесса соударения.

Массивное ударяющее тело моделируется материальной точкой. Его перемещение можно записать на основе второго закона Ньютона:

$$u_1(t) = \frac{gt^2}{2} + V_0 t - \frac{1}{m_0} \int_0^t P(\tau)(t - \tau) d\tau. \quad (2)$$

Здесь $V_0 = \sqrt{2gh}$ – начальная скорость соударения, h – высота, с которой падает ударяющее тело. Отметим, что первое слагаемое правой части выражения (2) опускается виду его относительной малости.

Динамическое поведение упругого стержня при центральном продольном воздействии может быть описано дифференциальным уравнением в частных производных (классическое волновое уравнение):

$$EA \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} - \rho A \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \delta(z)P(t). \quad (3)$$

В уравнении (3) введены обозначения: E – модуль упругости материала, ρ – плотность, A – площадь поперечного сечения, $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака, z – координата точек оси стержня.

При центральном поперечном ударе по бисимметричному тонкостенному стержню его поведение будем описывать системой дифференциальных уравнений в частных производных с учетом деформаций сдвига при изгибе:

$$EI_x \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial z^2} - \rho I_x \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} + GAf_{yy} \gamma_x = 0, GAf_{yy} \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial z^2} - \rho A \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial t^2} - \rho A \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \xi_y}{\partial z} = \gamma_x + \varphi_x. \quad (5)$$

Здесь обозначено: ξ_y – прогиб оси стержня при изгибе, φ_x – угол поворота сечения, γ_x – угол сдвига, $\frac{\partial \xi_y}{\partial z}$ – угол наклона касательной к оси стержня, G – модуль сдвига, I_x – момент инерции поперечного сечения, f_{yy} – коэффициент формы сечения при изгибе.

При эксцентричном поперечном ударе по бисимметричному тонкостенному стержню необходимо дополнительно рассматривать систему дифференциальных уравнений в частных производных с учетом деформаций сдвига при кручении:

$$EI_\omega \frac{\partial^2 \varphi_\omega}{\partial z^2} - GI_d \varphi_\omega - \rho I_\omega \frac{\partial^2 \varphi_\omega}{\partial t^2} + GA r^2 f_{\omega\omega} \gamma_\omega = 0, GA r^2 f_{\omega\omega} \frac{\partial^2 \gamma_\omega}{\partial z^2} - \rho A r^2 \frac{\partial^2 \gamma_\omega}{\partial t^2} - \rho A r^2 \frac{\partial^2 \varphi_\omega}{\partial t^2} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \xi_\omega}{\partial z} = \gamma_\omega + \varphi_\omega. \quad (7)$$

Здесь обозначено: ξ_ω – угол закручивания стержня вокруг центра тяжести, φ_ω – мера депланации сечения при закручивании, γ_ω – дополнительная мера депланации от сдвига, $\frac{\partial \xi_\omega}{\partial z}$ – полная мера депланации сечения, I_ω – секториальный момент инерции поперечного сечения, I_d – момент инерции поперечного сечения при чистом кручении, $f_{\omega\omega}$ – коэффициент формы сечения при кручении, $r = \sqrt{(I_x + I_y)/A}$ – полярный радиус инерции сечения.

Системы уравнений (4–7) построены в работе В.Б. Мещерякова. Они принадлежат к гиперболическому типу и описывают поведение тонкостенного стержня как волновода. При динамическом изгибе и кручении стержня наблюдаются волны поворота и сдвига поперечных сечений.

В аналитических выражениях силовых и кинематических параметров во всех рассмотренных моделях стержней учитывается внутреннее неупругое сопротивление в материале стержня по теории Е.С. Сорокина.

Дифференциальные уравнения в частных производных (3–7) целесообразно решать с помощью интегрального преобразования Лапласа, переходя к уравнениям в обыкновенных производных для изображений.

При продольном ударе:

$$\frac{d^2 \tilde{u}_2}{dz^2} - \frac{s^2}{c_0^2} \tilde{u}_2 = 0, \quad (8)$$

где $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения продольной волны, S – параметр преобразования Лапласа.

При центральном поперечном ударе

$$c_0^2 \frac{d^2 \tilde{\varphi}_x}{dz^2} - s^2 \tilde{\varphi}_x + \frac{c_x^2}{r_x^2} \tilde{\gamma}_x = 0, \quad c_x^2 \frac{d^2 \tilde{\gamma}_x}{dz^2} - s^2 \tilde{\gamma}_x - s^2 \tilde{\varphi}_x = 0, \quad (9)$$

$$\frac{d \tilde{\xi}_y}{dz} = \tilde{\gamma}_x + \tilde{\varphi}_x. \quad (10)$$

где $c_x = \sqrt{Gf_{yy}/\rho}$ – скорость распространения волн сдвига при изгибе.

При эксцентричном поперечном ударе

$$\frac{d^2 \tilde{\varphi}_\omega}{dz^2} - \left(\frac{\alpha}{\mu_\omega^2 r_\omega^2} + \lambda_0^2 \right) \tilde{\varphi}_\omega = - \frac{1}{\mu_\omega^2 r_\omega^2} \tilde{\gamma}_\omega, \quad \frac{d^2 \tilde{\gamma}_\omega}{dz^2} - \lambda_\omega^2 \tilde{\gamma}_\omega = \lambda_\omega^2 \tilde{\varphi}_\omega, \quad (11)$$

$$\frac{d \tilde{\xi}_\omega}{dz} = \tilde{\gamma}_\omega + \tilde{\varphi}_\omega, \quad (12)$$

где $\mu_\omega = \frac{c_0}{c_\omega}$, $r_\omega^2 = \frac{I_\omega}{Ar^2}$, $\alpha = \frac{I_d}{Ar^2 f_{\omega\omega}}$.

$c_\omega = \sqrt{Gf_{\omega\omega}/\rho}$ – скорость распространения волны сдвига при кручении.

Решения уравнений (8, 9 и 11) находятся с помощью экспоненты $\exp(\lambda z)$. Параметр λ является корнем алгебраического характеристического уравнения. В случае продольного удара уравнение (7) при подстановке выражения $\tilde{u}_2(z) = \exp(\lambda z)$ дает элементарное характеристическое уравнение: $\lambda^2 c_0^2 - s^2 = 0$.

При центральном поперечном ударе характеристическое уравнение является биквадратным:

$$(\lambda^2 - \lambda_x^2)(\lambda^2 - \lambda_0^2) + \frac{\lambda_x^2}{\mu_x^2 r_x^2} = 0. \quad (13)$$

Корни уравнения (13) можно записать таким образом:

$$\lambda = \pm \lambda_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(1 + \mu_x^2) \pm (1 - \mu_x^2) \sqrt{1 - \varepsilon}}, \quad (14)$$

со следующим обозначением малой величины ε при больших значениях s :

$$\varepsilon = \frac{4c_0^2}{r_x^2 s^2 (1 - \mu_x^2)^2}, \quad \mu_x = \frac{c_0}{c_x}.$$

В области оригиналов большим значениям S соответствуют малые значения времени t , что характерно для процесса удара.

Для получения приближенных значений корней используем дважды разложение выражения (14) в степенной ряд по малому параметру ε с удержанием двух слагаемых при каждом разложении. Если ограничиться в оригиналах трехкратными интегралами, то получаем:

$$\lambda_1 = \pm \left(\frac{s}{c_0} + \frac{c_0}{2r_x^2 s (\mu_x^2 - 1)} \right), \quad \frac{1}{\lambda_1} = \pm \left(\frac{c_0}{s} - \frac{c_0^3}{2r_x^2 s^3 (\mu_x^2 - 1)} \right), \quad (15)$$

$$\lambda_2 = \pm \left(\frac{s\mu_x}{c_0} - \frac{c_0}{2r_x^2 s \mu_x (\mu_x^2 - 1)} \right), \quad \frac{1}{\lambda_2} = \pm \left(\frac{c_0}{s\mu_x} + \frac{c_0^3}{2r_x^2 s^3 \mu_x^3 (\mu_x^2 - 1)} \right). \quad (16)$$

В случае эксцентричного поперечного удара характеристическое уравнение при кручении имеет вид:

$$\lambda^4 - \left(\frac{\alpha}{\mu_\omega^2 r_\omega^2} + \lambda_0^2 + \lambda_\omega^2 \right) \lambda^2 + \left(\frac{\alpha}{\mu_\omega^2 r_\omega^2} + \lambda_0^2 \right) \lambda_\omega^2 + \frac{\lambda_\omega^2}{\mu_\omega^2 r_\omega^2} = 0$$

Здесь введены обозначения:

$$\mu_\omega = \frac{c_0}{c_\omega}, \quad r_\omega^2 = \frac{I_\omega}{Ar^2}, \quad \alpha = \frac{I_d}{Ar^2 f_{\omega\omega}}, \quad \lambda_\omega = s/c_\omega,$$

$c_\omega = \sqrt{Gf_{\omega\omega}/\rho}$ – скорость распространения волны сдвига при кручении.

Безразмерная величина α для стандартных двутавров находится в диапазоне 0,0023 – 0,0122. Поэтому можно пренебречь слагаемым, в котором она стоит в числителе. Опуская подробности, для корней характеристического уравнения получаем приближенные выражения:

$$\lambda_3 = \pm \left(\frac{s}{c_0} + \frac{c_0}{2sr_\omega^2 (\mu_\omega^2 - 1)} \right), \quad \frac{1}{\lambda_3} = \pm \left(\frac{c_0}{s} - \frac{c_0^3}{2r_\omega^2 s^3 (\mu_\omega^2 - 1)} \right), \quad (17)$$

$$\lambda_4 = \pm \left(\frac{s\mu_\omega}{c_0} - \frac{c_0}{2sr_\omega^2 \mu_\omega (\mu_\omega^2 - 1)} \right), \quad \frac{1}{\lambda_4} = \pm \left(\frac{c_0}{s\mu_\omega} + \frac{c_0^3}{2r_x^2 s^3 \mu_\omega^3 (\mu_\omega^2 - 1)} \right). \quad (18)$$

Нелинейное интегральное уравнение (1) с внесенными в него аналитическими выражениями $u_1(P, t)$ и $u_2(P, t)$ можно решать численно, например, пользуясь методом Эйлера. Этот метод обычно применяется при численном решении систем линейных дифференциальных уравнений. Шаг по времени, следует согласовывать с ожидаемой длительностью удара.

При центральном продольном ударе возможна потеря устойчивости прямолинейной формы стержня. В линейной постановке параметры изогнутой оси остаются неопределенными. Рассматривается нелинейное уравнение изгиба с использованием точного выражения кривизны изогнутой оси стержня. Уравнение решается методом Галеркина с предварительным разложением в степенной ряд нелинейного множителя в уравнении. В результате могут быть получены все параметры напряженно-деформированного состояния стержня (перемещение, скорость, ускорение, изгибающий момент). При условии работы материала стержня в упругой стадии возможен возврат к прямолинейной форме стержня.

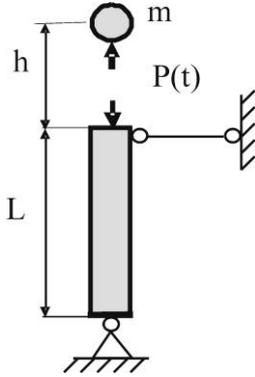
При центральном поперечном ударе по стержню с двумя плоскостями симметрии возможна потеря устойчивости плоской формы изгиба. Задача решается по аналогии со случаем центрального продольного удара. В результате могут быть получены все параметры стержня (линейные и угловые перемещения, скорости, ускорения, изгибающий момент, бимомент, изгибно-крутящий момент). При условии работы материала стержня в упругой стадии возможен возврат к плоской форме изгиба стержня.

По окончании ударного взаимодействия ударяющее тело может получить отрицательную скорость, т.е. “отскочить”. В этом случае можно рассмотреть повторные соударения. Если ударяющее тело остается в контакте с ударяемым, то его массу следует учесть при вычислении частоты и периода свободных колебаний ударяемого тела, которые возникают после удара. Учет массы ударника может быть выполнен с использованием понятия “приведенной массы” ударяемого тела.

Начальными условиями для свободных колебаний после удара служат перемещение и скорость точки контакта ударяемого тела, зафиксированные в

момент окончания удара ($P(t)=0$). При колебаниях учитывается внутреннее неупругое сопротивление в материале стержня.

В третьей главе рассмотрен продольный удар по стержню.



Расчеты проведены в соответствии с изложенной концепцией. Начнем со случая центрального удара (рисунок 1). Опуская подробности, приводим полученное решение:

$$u_2(0,t) = \frac{1}{\rho A c_0} \left[\int_0^t P(\tau) d\tau + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{nt^*}^t P(\tau) d\tau \right]. \quad (19)$$

Рисунок 1. Расчетная схема

В реальных системах динамические процессы затухают во времени. Причиной служат диссипативные силы (внешнее и внутреннее сопротивление). Будем учитывать внутреннее неупругое сопротивление в материале колонны в соответствии с теорией Е.С. Сорокина. В этом случае в выражении (19) квадратную скобку необходимо снабдить экспоненциальным множителем:

$$u_2(0,t) = \frac{1}{\rho A c_0} \exp\left(-\gamma \frac{\pi c_0}{2L} t\right) \left[\int_0^t P(\tau) d\tau + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{nt^*}^t P(\tau) d\tau \right]. \quad (20)$$

где γ – коэффициент внутреннего трения в материале.

Второе слагаемое в квадратной скобке (20) имеет ясный физический смысл – это учет отраженных от опорного сечения упругих волн сжатия-растяжения. Количество этих отражений, которые могут повлиять на искомый результат, зависит от величины L и диапазона времени, в течение которого ведется наблюдение за процессом.

Если выражения (2) и (20) внести в уравнение (1), то мы получим нелинейное интегральное уравнение для определения контактной силы:

$$\left[\frac{P(t)}{K} \right]^{2/3} = V_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t P(\tau)(t-\tau) d\tau - \frac{1}{\rho A c_0} \exp\left(-\frac{\gamma \pi}{2L} c_0 t\right) \left[\int_0^t P(\tau) d\tau + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{nt^*}^t P(\tau) d\tau \right] \quad (21)$$

Аналитическое решение уравнения (21) получить невозможно ввиду его нелинейности. Будем искать решение методом Эйлера. Он применяется при численном решении систем дифференциальных уравнений. Здесь мы использу-

ем метод Эйлера для численного решения нелинейного интегрального уравнения.

Рассмотрим в качестве примера удар по двутавру №18 длиной 2 м. Исходные данные приведены в таблице 1. На рисунках 2 и 3 показаны результаты расчетов.

Таблица 1. Исходные данные

Наименование и размерность	Числовое значение
Масса ударяющего тела m , кг	100
Начальная скорость удара, V_0 , м/с	2
Площадь поперечного сечения A , м ²	0,00234
Высота колонны L , м	2
Контактная жесткость, K_0 , Нм ^{-3/2}	$3 \cdot 10^{09}$
Коэффициент внутреннего трения, γ	0,025

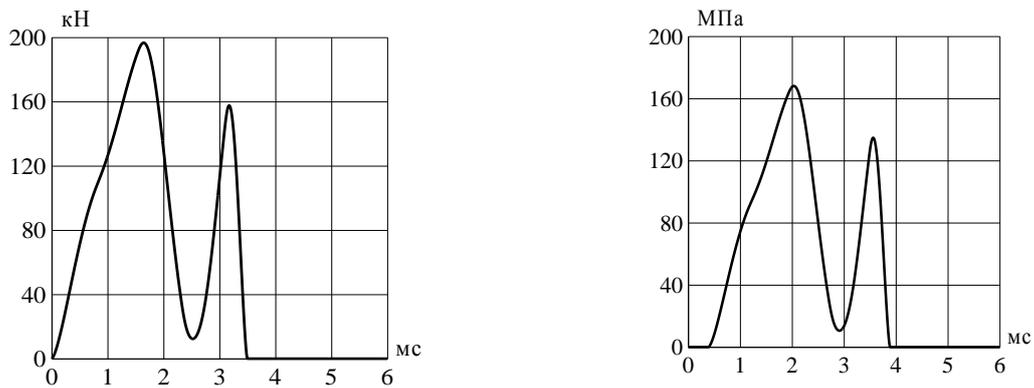


Рисунок 2. Контактная сила и напряжение сжатия колонны

Вычисления проводились по методу Эйлера с шагом по времени $\Delta t = 10$ мкс. В таблице 2 приведены максимальные значения параметров.

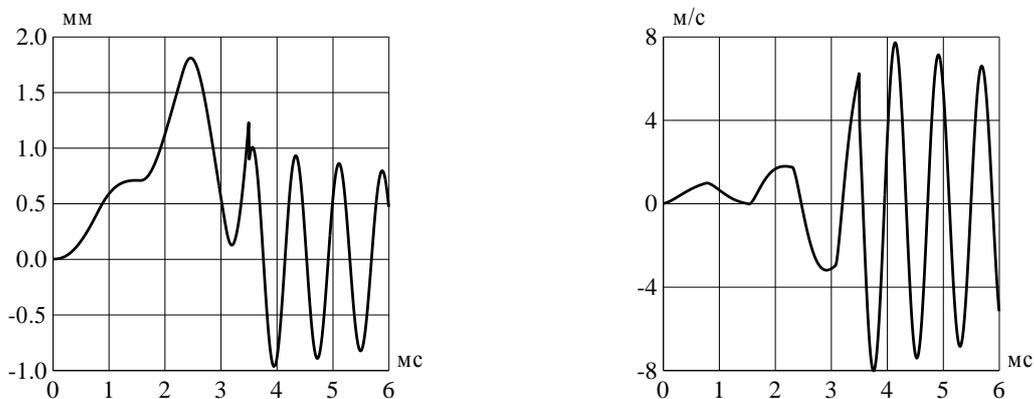


Рисунок 3. Перемещение и скорость торцевого сечения колонны

Таблица 2. Максимальные значения параметров и временные характеристики процесса

Наименование и размерность	Числовые значения	Моменты времени, мкс
Контактная сила P , кН	196,6	1640
Длительность удара, мкс	3500	0 – 3500
Количество отраженных волн	4	772, 1545, 2317, 3090
Реакция в опорном сечении, кН	393,2	2030
Перемещение y , мм	1,81	2460
Скорость V , м/с	8,02	3760
Нормальное напряжение, МПа	168,1	2030
Период колебаний после удара, мкс	772	После 3500 мкс

Как видно по приведенным результатам, процесс удара продолжался 3500 мкс, за это время успели прийти четыре отраженные волны.

Рассмотрим продольный удар массивного тела по колонне при наличии эксцентриситета e_y в плоскости наибольшей жесткости ZOY и эксцентриситета e_x в плоскости ZOX (рисунок 4). В точке удара благодаря деформации возникает секториальный эксцентриситет: $e_\omega = e_y \cdot e_x$.

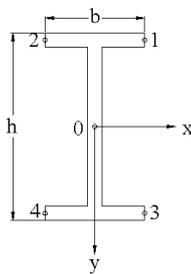


Рисунок 4. Поперечное сечение

Поведение колонны (стержня с двумя плоскостями симметрии) описывается дифференциальными уравнениями в частных производных (3, 4 – 7). Контактная сила при ударе определяется из нелинейного интегрального уравнения:

$$\left[\frac{P(t)}{K_0} \right]^{2/3} = V_0 t - \frac{1}{m_0} \int_0^t P(\tau)(t-\tau) d\tau - u_2(0,t) - u(0,t). \quad (22)$$

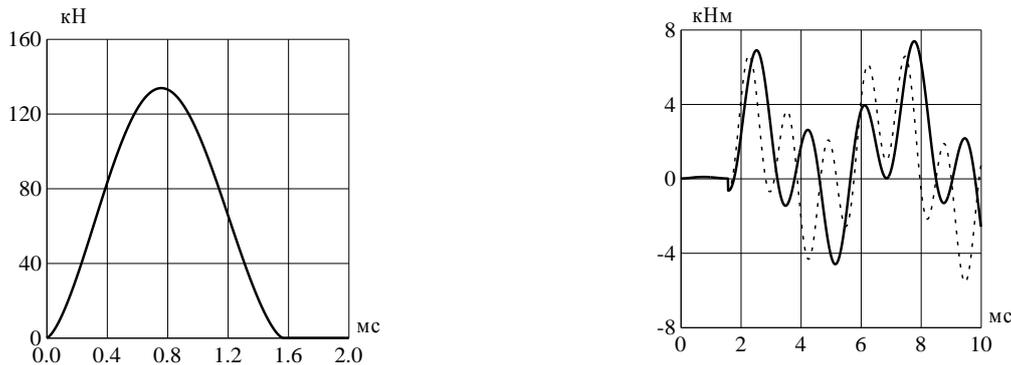
Перемещение $u_2(0,t)$ торцевого сечения без учета эксцентриситета было приведено ранее (см. (20)). Для определения дополнительного перемещения $u(0,t)$ (за счет эксцентриситетов) была решена система уравнений (4 – 7).

В качестве примера рассмотрим колонну в виде двутавра №60. Исходные данные приведены в таблице 3.

Таблица 3. Исходные данные

Наименование и размерность	Числовые значения
Масса ударяющего тела m , кг	24
Начальная скорость удара, V_0 , м/с	2,5
Высота колонны L , м	6
Моменты инерции: $I_x, \text{м}^4$ $I_y, \text{м}^4$ $I_\omega, \text{м}^6$, $I_d, \text{м}^4$	1,725E-05 7,681E-04 1,300E-06 1,235E-05
Эксцентриситеты: $e_x, \text{м}$ $e_y, \text{м}$ $e_\omega, \text{м}^2$	0,001 0,001 0,00001

Расчеты проведены в соответствии с изложенной выше концепцией. Шаг счета по времени был принят равным 10 мкс. На рисунках 5 – 6 показаны графики изменения во времени силовых и кинематических параметров процесса удара по колонне. Пунктирные линии построены без учета деформаций сдвига по теории В.З. Власова.

Рисунок 5. Контактная сила при ударе, момент M_y в среднем сечении

В таблицах 4 и 5 приведены максимальные значения параметров, характеризующих процессы удара и колебаний после удара.

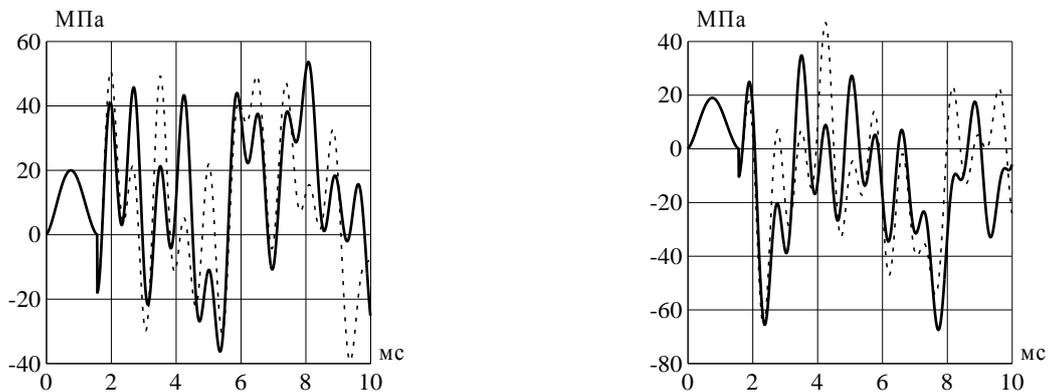
Рисунок 6. Нормальные напряжения в точках 1 и 2 сечения $z=0,35 L$

Таблица 4. Максимальные значения параметров при ударе и продольных колебаниях после удара

Наименование и размерность	Числовое значение
Контактная сила P , кН	133,75
Длительность удара, мкс	1570
Перемещение торца u_2 , мм	0,33
Скорость \dot{u}_2 , м/с	1,02
Ускорение \ddot{u}_2 , a/g	949,6

Таблица 5. Максимальные значения параметров при изгибных и крутильных колебаниях

Наименование и размерность	Числовое значение	
	С учетом сдвигов	Без учета сдвигов
Перемещение сечения ξ_y , мм	5,06	5,05
Скорость $\dot{\xi}_y$, м/с	0,63	0,63
Изгибающий момент M_x , кНм	7,38	6,64
Изгибающий момент M_y , кНм	20,66	20,49
Бимомент B_ω , Нм ²	17,19	17,06
Нормальные напряжения в точке 1, МПа:	53,6	50,8
Нормальные напряжения в точке 2, МПа:	67,6	66,1

Отметим, что деформации сдвига заметно влияют на частоты свободных колебаний. Удар с эксцентриситетами величины 1 мм за счет изгиба и кручения колонны довел напряжения до 67,6 МПа. На практике такие размеры эксцентриситета могут оказаться непредвиденными и привести к нежелательным последствиям. При отсутствии эксцентриситетов максимальное значение напряжения составит 31,8 МПа.

В четвертой главе рассмотрены примеры поперечного удара.

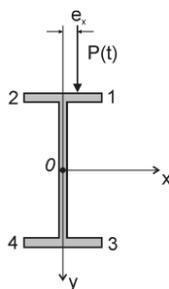


Рисунок 7. Поперечное сечение

Была решена задача о центральном поперечном ударе массивного тела по шарнирно закрепленному двутавру. Результаты изложены в диссертации. Рассмотрим результаты решения задачи об ударе с эксцентриситетом (рисунок 7). В таблице 6 приведены максимальные значения

параметров, на рисунках 8–10 показаны графики силовых и кинематических параметров. Пунктирные линии на графиках построены без учета деформаций сдвига – по теории В.З. Власова.

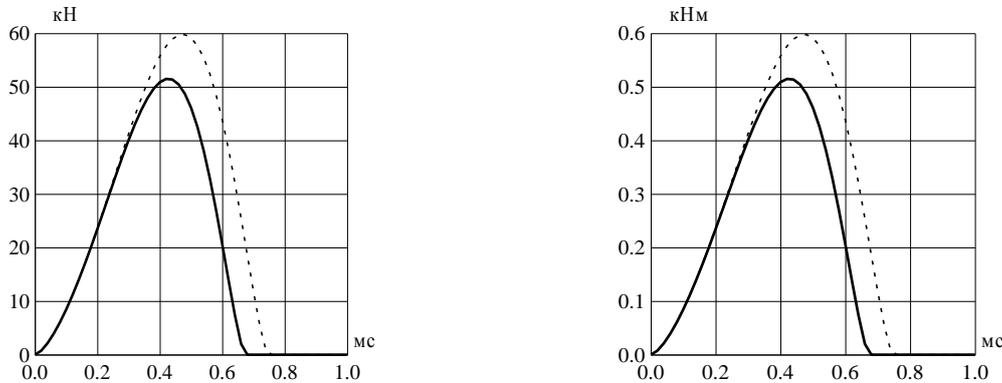


Рисунок 8. Контактная сила и изгибно крутящий момент в среднем сечении стержня

Таблица 6. Максимальные значения параметров при ударе

Наименование параметров	Числовое значение	
	С учетом сдвигов	Без учета сдвигов
Контактная сила P , кН	51,50	59,77
Изгибающий момент M_x , кНм	48,77	62,76
Бимомент B_ω , кНм ²	0,977	1,258
Изгибно-крутящий момент M_ω , кНм	0,515	0,598
Перемещение y , мм	17,3	16,0

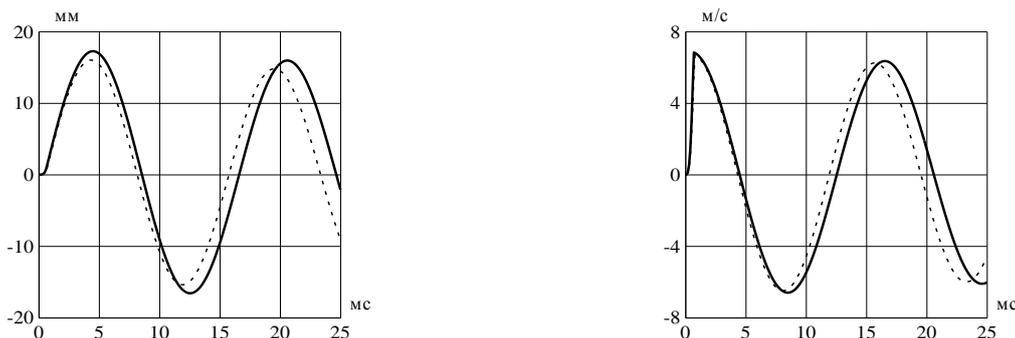


Рисунок 9. Перемещение и скорость центра тяжести среднего сечения стержня

Учтенные в расчетах деформации сдвига при изгибе и кручении повлияли таким образом: силовые параметры уменьшились на 16 – 29 %, кинематические увеличились на 2 – 8 %.

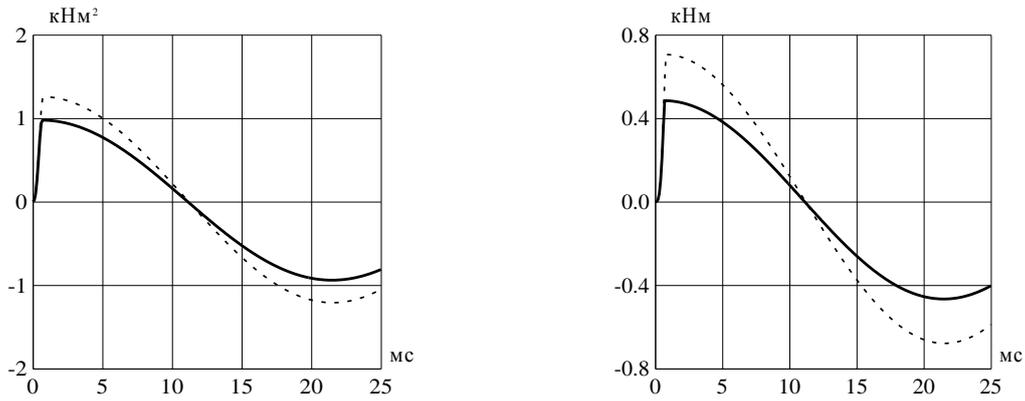


Рисунок 10. Бимомент и момент чистого кручения в среднем сечении двутавра

Получаемые на основании расчета данные позволяют оценивать прочность и жесткость тонкостенных стержней при действии ударных нагрузок.

В пятой главе рассмотрена потеря устойчивости стержней при ударе.

Устойчивость при центральном продольном ударе рассмотрим на примере двутавра №18 длиной 5 м. Критическая сила $P_{кр}$ при шарнирном закреплении стержня на опорах оказалась равной 68,479 кН. Если при ударе будет достигнута эта величина сжимающей силы, то произойдет потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня. При этом в линейной постановке горизонтальное перемещение точек оси стержня остается неопределенным.

Нелинейное дифференциальное уравнение равновесия с точным значением кривизны стержня имеет вид:

$$EI_x \frac{d^2y}{dz^2} \left[1 - \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right]^{-1/2} + Py = 0. \quad (23)$$

Приближенное решение нелинейного уравнения (28) методом Галеркина:

$$y(z) = y_0 \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \quad \text{где} \quad y_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} L \sqrt{\frac{P}{P_{кр}} - 1}. \quad (24)$$

Выражение (24) используется в расчете, когда становятся известными значения сжимающей силы, превышающие $P_{кр}$. Если материал стержня работает в упругой стадии, то прямолинейная форма равновесия восстанавливается при снижении значений сжимающей силы. После окончания удара начинаются затухающие продольные колебания стержня. Параметры процесса зависят от массы ударяющего тела и начальной скорости удара. В таблице 7

приведены результаты расчета, На рисунках 11 – 12 приведены графики изменения во времени параметров при ударе.

Таблица 7. Максимальные значения параметров

Наименование и размерность	Числовые значения
Масса ударника, кг	4,621
Начальная скорость удара, м/с	2,0
Шаг счета по времени, мкс	1
Длительность удара, мкс	868
Контактная сила, кН	34,243
Реакция на опоре, кН	68,486
Начало потери устойчивости, мкс	1362
Напряжение сжатия, МПа	201,71
Окончание потери устойчивости, мкс	1369
Длительность потери устойчивости, мкс	7
Отклонение среднего сечения, мм	46,22
Период колебаний после удара, мс	1,930
Вертикальное перемещение торца, мм	0,164
Скорость, м/с	0,522

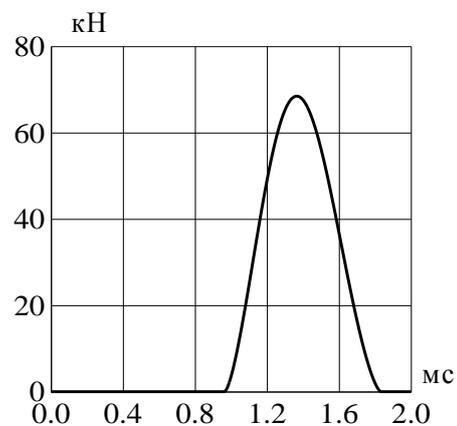
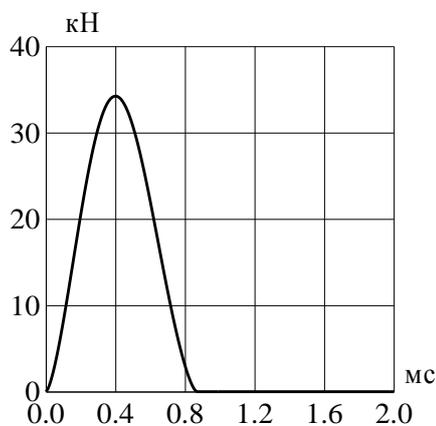


Рисунок 11. Контактная сила и реакция в опорном сечении

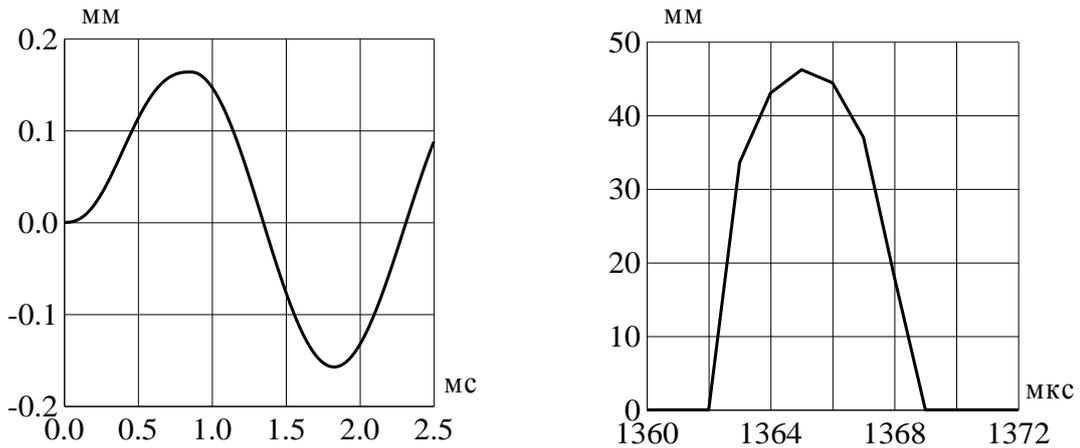


Рисунок 12. Вертикальное перемещение центра тяжести верхнего сечения

при ударе. Горизонтальное перемещение среднего сечения при потере устойчивости

Устойчивость плоской формы изгиба стержня при центральном поперечном ударе рассмотрим на примере двутавра №50 длиной 8 м при начальной скорости удара массивным телом 3,7 м/с.

По аналогии с рассмотренным продольным ударом были найдены выражения для линейного и углового перемещения в среднем сечении при потере устойчивости плоской формы изгиба:

$$f_x = \frac{4\sqrt{2}L}{\pi} \sqrt{\left(\frac{P}{P_{kr}}\right)^2 - 1}, \quad f_\omega = \frac{4\sqrt{2}L}{\pi} \sqrt{\frac{N_x}{N_\omega r^2}} \sqrt{\left(\frac{P}{P_{kr}}\right)^2 - 1}, \quad (25)$$

где

$$r^2 = \frac{I_x + I_y}{A}, \quad N_x = \frac{\pi^2 EI_y}{(2L)^2}, \quad N_\omega = \frac{\pi^2 EI_\omega + GI_d (2L)^2}{r^2 (2L)^2},$$

Выражения (25) используются в расчете, когда значения контактной силы начинают превышать P_{kr} . Если материал стержня работает в упругой стадии, то плоская форма изгиба восстанавливается при снижении значений контактной силы. В таблице 8 приведены результаты расчетов, относящиеся к процессу удара и к колебаниям после удара. В таблице 9 показаны результаты вычислений, относящиеся к очень краткому процессу потери устойчивости плоской формы изгиба.

Таблица 8. Максимальные значения параметров

Наименование и размерность	Числовые значения	
	С учетом сдвигов	Без учета сдвигов
Критическое значение силы, кН	104,38209	106, 04816
Масса ударяющего тела m, кг	26,581	14,8733
При ударе: контактная сила, кН	104, 38334	106, 04946
Превышение критического значения	0,0012%	0,0017%
Длительность удара, мкс	624,0	661,2
Шаг счета по времени, мкс	0,4	
Изгибающий момент M_x , кНм	92,62	100,16
Напряжение $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_\omega$, МПа	183,5	158,5
После удара: период колебаний, мс	41,93	40,55
Шаг счета по времени, мкс	50	
перемещение, мм	77,19	60,29
скорость, м/с	12,99	10,31
ускорение, a/g	202	166

Таблица 9. Параметры при потере устойчивости

Наименование и размерность	Числовые значения	
	С учетом сдвигов	Без учета сдвигов
Момент начала, мкс	381,6	394,0
Момент окончания, мкс	383,6	396,4
Длительность выпучивания, мкс	2,0	2,4
Шаг вычислений во времени, мкс	0,4	
Перемещение центра тяжести, мм	35,2	35,7
Угол закручивания, рад	0,077	0,036
Изгибающий момент M_y , кНм	453,5	459,7
Напряжение от изгиба σ_y , МПа	97,0	98,3
Бимомент B_ω , кНм ²	1,377	0,638
Напряжение от кручения σ_ω , МПа	53,1	24,6
Сумма напряжений $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_\omega$, МПа	183,5	158,5

На рисунках 13 – 14 показаны графики изменения во времени параметров в процессе потери устойчивости плоской формы изгиба. Пунктирные линии получены без учета деформация сдвига.

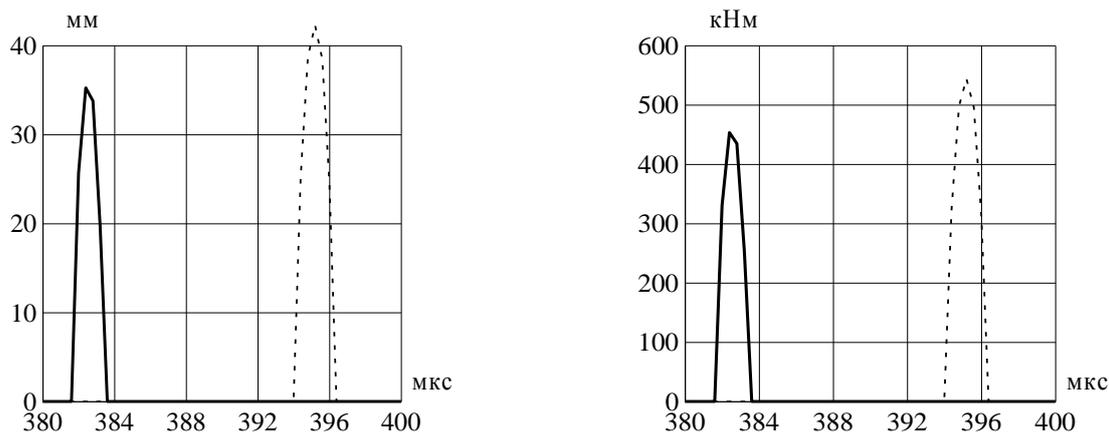


Рисунок 13. Перемещение центра тяжести среднего сечения и изгибающий момент в среднем сечении при потере устойчивости

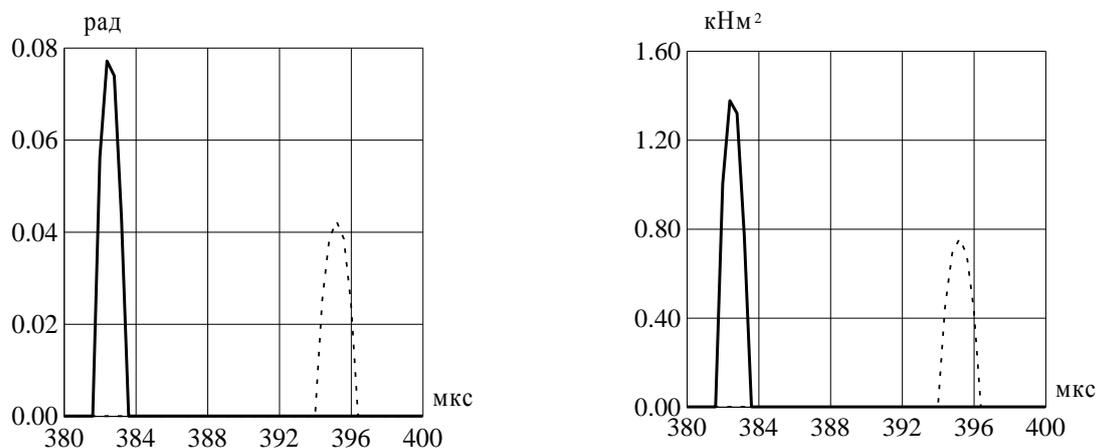


Рисунок 14. Угол закручивания среднего сечения и бимомент в среднем сечении при потере устойчивости

Решение задачи с учетом деформаций сдвига при изгибе и кручении приводит к существенному уточнению контактной силы при ударе. Если не учитывать деформации сдвига, то при тех же условиях удара в стержне прогнозируются напряжения, далеко выходящие за пределы упругости. При этом исходная плоская форма равновесия даже теоретически не восстанавливается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1) В диссертации предложена и рекомендуется к использованию на практике концепция расчета стержней на удар сосредоточенной массой, включающая в себя такие элементы:

1.1. Местные упругие деформации в малой окрестности точки удара учитываются на основе теории Г. Герца [121].

1.2. Поведение тонкостенных стержней при ударе сосредоточенной массой, рассматривается на основе дифференциальных уравнений гиперболического типа.

1.3. Для решения дифференциальных уравнений в частных производных используется интегральное преобразование Лапласа.

1.4. Корни характеристических уравнений находятся приближенно на основе двукратного разложения в степенные ряды по малому параметру.

1.5. Для численного решения нелинейного интегрального уравнения с целью определения контактной силы при ударе применяется известный метод Эйлера.

1.6. Для определения параметров стержня в процессе потери устойчивости используются уравнения с точным значением кривизны оси стержня.

2) На основе предложенной концепции рассмотрены практические задачи расчета тонкостенных стержней открытого профиля на действие ударной нагрузки:

2.1. При продольном центральном ударе определяется напряженно-деформированное состояние стержня с учетом волн, отраженных от опорных устройств. Рассмотрено влияние двухосного эксцентриситета.

2.2. При поперечном ударе определяется напряженно-деформированное состояние стержня с учетом волн, отраженных от опорных устройств. Учет деформаций сдвига при изгибе и кручении дает существенные поправки к максимальным значениям силовых и кинематических параметров.

2.3. Рассмотрена потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия при центральном продольном ударе. При условии работы материала стержня в упругой стадии получены перемещения выпучивания и возврат в прямолинейную форму при уменьшении ударной силы. Полученные теоретические результаты хорошо согласуются с данными экспериментов, опубликованных в 1961 году в статье М.Е. Каган и М.Д. Геня [52].

2.4. Рассмотрена потеря устойчивости плоской формы динамического изгиба стержня при центральном поперечном ударе. При условии работы материала стержня в упругой стадии получены линейные и угловые перемещения выпучивания и возврат в плоскую форму изгиба при снижении ударной силы.

Основные результаты работы опубликованы в статьях:

1. Аунг Зо Лат. Расчёт тонкостенного стержня на удар массивного тела. [Текст] / Аунг Зо Лат // Строительство и реконструкция. – 2013. – №3(47). – С.10–16.
2. Аунг Зо Лат. Упругий удар по тонкостенному стержню. [Текст] / Аунг Зо Лат // Мир транспорта. – 2012. – С. 26–33.
3. Мещеряков, В.Б., Аунг Зо Лат. Устойчивость стержней при продольном и поперечном ударе. [Текст] / В.Б. Мещеряков, Аунг Зо Лат // Известия Транссиба. – 2012. – №1(9). – С. 98–106.
4. Мещеряков, В.Б., Аунг Зо Лат. Поведение тонкостенных стержней при ударных нагрузках. [Текст] / В.Б. Мещеряков, Аунг Зо Лат // Известия Транссиба. – 2012. – №3(11). – С. 113–123.

Аунг Зо Лат

**ПОВЕДЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ
ПРИ УДАРНЫХ НАГРУЗКАХ**

Подписано к печати

Форма 60x 84/16

Объем 1,5 п.л.

Заказ №

Тираж 80 экз

127994, Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9 УПЦ ГИ МИИТ